二阶 Hopfield 型神经网络的稳定性分析及收敛速度的估计

徐炳吉[1] ,廖晓昕[1] ,刘新芝[1,2] ,陈钦生[3]
(1. 华中科技大学控制科学与工程系 ,湖北武汉 430074 ;2. 滑铁卢大学应用数学系 ,滑铁卢 ,加拿大 ;3. 山东理工大学物理系 ,山东淄博 255012)

摘 要: 本文讨论二阶连续 Hopfield 型神经网络平衡点的全局稳定性问题 ,利用 LMI 方法和 Lyapunov 方法得到了网络平衡点全局渐近稳定和全局指数稳定的几个充分条件 ,并对其指数收敛速度进行了估计.

关键词: 二阶神经网络; 全局渐近稳定性; 指数收敛速度
中图分类号: TP183 **文献标识码**: A **文章编号**: 0372-2112 (2003) 01-0063-05

Stability Analysis and Estimation of Convergence Rate for Second Order Hopfield Neural Networks

XU Bing-ji[1] ,LIAO Xiao-xin[1] ,LIU Xin-zhi[1,2] ,CHEN Qin-sheng[3]
(1. *Dept. of Control Sci. & Eng., Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei* 430074, *China*;
2. *Dept. of Applied Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Canada*;
3. *Dept. of Physics, Shandong University of Science and Technology, Zibo, Shandong* 255012, *China*)

Abstract: Global stability of equilibrium point of a class of second order Hopfield neural networks is discussed in this paper. Some sufficient conditions for the global asymptotic stability and global exponential stability of equilibrium point of such networks are obtained by means of Lyapunov functions and linear matrix inequalities (LMI'S) ,the exponential convergence rate of equilibrium point is also estimated.

Key words: second order neural networks ;global asymptotic stability ;exponential convergence rate

1 引言

由于高阶神经网络的收敛速度等各方面比一阶神经网络具有更强的功能 ,因此高阶 Hopfield 型神经网络的研究愈来愈受到人们的重视[1~5]. 对于最优化计算神经网络 ,理想的情形是只有一个全局渐近稳定的平衡点[6] ,且从任意一点出发的网络轨道以指数收敛速度趋于网络的平衡点. 因此下面对二阶连续 Hopfield 型神经网络平衡点的全局稳定性进行分析 ,讨论在何种条件下网络具有全局指数稳定性 ,并估计网络运动轨道趋于平衡点的指数收敛速度.

考虑具有下列形式的二阶 Hopfield 型神经网络[7]

$$C_i\frac{du_i}{dt}=-\frac{u_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}g_j(u_j)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}T_{ijk}g_j(u_j)\,g_k(u_k)+I_i\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中 $C_i>0$, $R_i>0$ 和 I_i 分别为第 i 个神经元的电容常数、电阻常数和网络的外部输入, T_{ij}和 T_{ijk}分别为网络的一阶和二阶连接权.

假设 $g_i(u_i)$满足条件:

$$|g_i(u_i)|\le M_i,\ 0<g_i'(u_i)\le k_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 M_i, k_i 为常数.

设 $u=u^*$,即 $u_i=u_i^*$, $i=1,2,\cdots,n$ 为式(1)的平衡点, $x=u-u^*=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $f_i(x_i)=g_i(x_i+u_i^*)-g_i(u_i^*)$,

易知 $$|f_i(z)|\le k_i|z|\ 且\ zf_i(z)\ge 0,\quad z\in R \tag{3}$$

且式(1)可写为等价形式

$$C_i\frac{dx_i}{dt}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(x_j)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}T_{ijk}(f_j(x_j)f_k(x_k)+f_k(x_k)g_j(u_j^*)+f_j(x_j)g_k(u_k^*)),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

利用 Taylor 公式,将式(4)写为

$$C_i\frac{dx_i}{dt}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}T_{ij}f_j(x_j)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(T_{ijk}+T_{ikj})\zeta_k f_j(x_j)\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

式中 ζ_k 介于 $g_k(u_k)$与 $g_k(u_k^*)$之间.

令 $C=\mathrm{diag}(C_1,C_2,\cdots,C_n)$, $R=\mathrm{diag}(R_1,R_2,\cdots,R_n)$,

收稿日期:2000-10-23;修回日期:2002-06-05
基金项目:国家自然科学基金(No. 60074008) ;高校博士点基金(No. 20010487005)

$$T=(T_{ij})_{n\times n},\quad T_i=(T_{ijk})_{n\times n},(i=1,2,\cdots,n),$$
$$\Pi=(T_1+T_1^T,T_2+T_2^T,\cdots,T_n,T_n^T)^T,$$
$$f(x)=(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_n(x_n))^T,$$
$$F(x)=\mathrm{diag}(f(x),f(x),\cdots,f(x)),$$
$$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)^T,\quad \Gamma=\mathrm{diag}(\zeta,\zeta,\cdots,\zeta),$$
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad M=(M_1,M_2,\cdots,M_n)^T.$$

则式(5)又可写成为等价形式

$$C\frac{dx}{dt}=-R^{-1}x+Tf(x)+f^T(x)\Pi\zeta \tag{6}$$

文中约定,对任意矩阵 A, $\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^T,A)}$,对任意向量 $y\in R^n$, $\|y\|=\sqrt{y^Ty}$.

2 全局渐近稳定性分析

定理 1 若存在对称正定矩阵 P,对角阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$, $Q=\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_n)$, $h_i\geq0$, $q_i\geq0$, $(i=1,2,\cdots,n)$及常数 $\varepsilon>0$, $\varepsilon'>0$ 使得

$$\boxed{\Phi=\begin{bmatrix}-R^{-1}C^{-1}P-PC^{-1}R^{-1} & PC^{-1}T-R^{-1}C^{-1}H+K^TQ & \|M\|P & 0\\ T^TC^{-1}P-HC^{-1}R^{-1}+QK & HC^{-1}T+T^TC^{-1}H+(\varepsilon+\varepsilon')\Pi^T\Pi-2Q & 0 & \|M\|H\\ \|M\|P & 0 & -\varepsilon C^2 & 0\\ 0 & \|M\|H & 0 & -\varepsilon' C^2\end{bmatrix}<0}$$

则系统(1)的平衡点 u^* 全局渐近稳定.

证明 取 Lyapunov 函数 $V=x^TPx+2\sum_{i=1}^n h_i\int_0^{x_i}f_i(z)\,dz-2\sum_{i=1}^n q_i\int_0^t f_i(x_i)(f_i(x_i)-k_i(x_i))\,d\tau$,则沿式(6)的解对 V 求导数得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}+2\sum_{i=1}^n h_if_i(x_i)\dot{x}_i-2\sum_{i=1}^n q_if_i(x_i)(f_i(x_i)-k_ix_i)$$
$$=-2x^TR^{-1}C^{-1}Px+2x^T(PC^{-1}T-R^{-1}C^{-1}H+K^TQ)f(x)+2f^T(x)(HC^{-1}T-Q)f(x)+2x^TPC^{-1}F^T(x)\Pi\zeta$$
$$+2f^T(x)HC^{-1}F^T(x)\Pi\zeta$$
$$=-2x^TR^{-1}C^{-1}Px+2x^T(PC^{-1}T-R^{-1}C^{-1}H+K^TQ)f(x)+2f^T(x)(HC^{-1}T-Q)f(x)$$
$$+2x^TPC^{-1}\Gamma^T\Pi f(x)+2f^T(x)HC^{-1}\Gamma^T\Pi f(x)$$

由矩阵 $PC^{-1}C^{-1}P$ 的正定性及 $\Gamma^T\Gamma=\|\zeta\|^2I$, $\|\zeta\|\leq\|M\|$,并利用向量不等式[8] $2u^Tv\leq\frac{1}{\varepsilon}u^Tu+\varepsilon v^Tv$, $u,v\in R^n$ ($\varepsilon>0$ 为任意实数)得

$$2x^TPC^{-1}\Gamma^T\Pi f(x)\leq\frac{1}{\varepsilon}x^TPC^{-1}\Gamma^T\Gamma C^{-1}Px+\varepsilon f^T(x)\Pi^T\Pi f(x)$$
$$\leq\frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2x^TPC^{-1}C^{-1}Px+\varepsilon f^T(x)\Pi^T\Pi f(x)$$
$$2f^T(x)HC^{-1}\Gamma^T\Pi f(x)\leq\frac{1}{\varepsilon'}f^T(x)HC^{-1}\Gamma^T\Gamma C^{-1}Hf(x)+\varepsilon' f^T(x)$$
$$\cdot\Pi^T\Pi f(x)\leq f^T(x)\left(\frac{1}{\varepsilon'}\|M\|^2HC^{-1}C^{-1}H+\varepsilon'\Pi^T\Pi\right)f(x)$$

因此

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}\leq x^T\left[\frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2PC^{-1}C^{-1}P-2R^{-1}C^{-1}P\right]x$$
$$+2x^T(PC^{-1}T-R^{-1}C^{-1}H+K^TQ)f(x)$$
$$+f^T(x)\left[\frac{1}{\varepsilon'}\|M\|^2HC^{-1}C^{-1}H+(\varepsilon'+\varepsilon)\Pi^T\Pi\right.$$
$$\left.+2(HC^{-1}T-Q)\right]f(x)$$
$$=[x^Tf^T(x)]\Psi\begin{bmatrix}x\\ f(x)\end{bmatrix}$$

其中

$$\Psi=\begin{bmatrix}-R^{-1}C^{-1}P-PC^{-1}R^{-1}+\frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2PC^{-2}P & PC^{-1}T-R^{-1}C^{-1}H+K^TQ\\ T^TC^{-1}P-HC^{-1}R^{-1}+QK & \Omega\end{bmatrix}$$

$$\Omega=HC^{-1}T+T^TC^{-1}H+\frac{1}{\varepsilon'}\|M\|^2HC^{-2}H+(\varepsilon+\varepsilon')\Pi^T\Pi-2Q$$

由 Schur 补[9], $\Psi<0$ 的充分必要条件为 $\Phi<0$,故由 $\Phi<0$ 和 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}<0$,因此系统(1)的平衡点 u^* 全局渐近稳定. 证毕

推论 若存在对角阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)>0$,常数 $\varepsilon>0$ 使 $\Theta=\begin{bmatrix}T^TC^{-1}H+HC^{-1}T+\varepsilon\Pi^T\Pi & \|M\|H\\ \|M\|H & -\varepsilon C^2\end{bmatrix}\leq0$,则系统(1)的平衡点 u^* 全局渐近稳定.

证明 在定理 1 的证明中令 $P=0$, $Q=0$,即取 Lyapunov 函数

$$V=2\sum_{i=1}^n h_i\int_0^{x_i}f_i(z)\,dz,\text{则}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}=-2x^TR^{-1}C^{-1}Hf(x)+2f^T(x)HC^{-1}Tf(x)$$
$$+2f^T(x)HC^{-1}\Gamma^T\Pi f(x)$$
$$\leq-2x^TR^{-1}C^{-1}Hf(x)+f^T(x)$$
$$\left(\varepsilon\Pi^T\Pi+\frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2HC^{-1}C^{-1}H+HC^{-1}T+T^TC^{-1}H\right)f(x)$$

由 Schur 补[9], $\Theta\leq0$ 的充分必要条件为

$$HC^{-1}T+T^TC^{-1}H+\frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2HC^{-1}C^{-1}H+\varepsilon\Pi^T\Pi\leq0$$

故 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}\leq-2x^TR^{-1}C^{-1}Hf(x)=-2\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{R_iC_i}x_if_i(x_i)<0.$

因此系统(1)的平衡点 u^* 全局渐近稳定.

注 1 对于系统(1),当二阶连接权 $T_{ijk}\equiv0$ 时可得其特殊情形,即一阶 Hopfield 网络

$$C_i\frac{du_i}{dt}=-\frac{u_i}{R_i}+\sum_{j=1}^n T_{ij}g_j(u_j)+I_i,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

由定理 1 的推论得到 Hopfield 神经网络式(7)的平衡点 u^* 全局渐近稳定的充分条件为存在对角阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)>0$ 使得 $HT+T^TH\leq0$,此为文[11]中定理 4 的结论. 因此文[11]中定理 4 是本文定理 1 的推论应用于 Hopfield 神经网络式(7)的特例.

3　全局指数稳定性分析及收敛速度的估计

定理 2　若存在对称正定矩阵 P 阵使

$$\alpha=\lambda_{\min}(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})-2(\|PC^{-1}T\| + \|PC^{-1}\|\|\Pi\|\|M\|)\max_{1\le i\le n}\{k_i\}>0,$$

则系统(1)的平衡点 u^* 全局指数稳定,且系统运动轨道 $u(t,u_0)$ 满足

$$\|u(t,u_0)-u^*\|\le\delta\|u_0-u^*\|e^{-\beta t},\ \forall t\ge 0,\ \forall u_0\in R^n$$

其中 $\delta=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$, $\beta=\dfrac{\alpha}{2\lambda_{\max}(P)}$.

证明　作 Lyapunov 函数 $V=x^TPx$,则沿式(6)的解对 V 求导数得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{(6)} &= -x^T(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})x+2x^TPC^{-1}Tf(x)\\ &\quad +2x^TPC^{-1}F^T(x)\Pi\zeta\\ &\le -\lambda_{\min}(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})\|x\|^2\\ &\quad +2\|PC^{-1}T\|\|x\|\|f(x)\|\\ &\quad +2\|PC^{-1}\|\|\Pi\|\|x\|\|FT(x)\|\|\zeta\|\end{aligned}$$

由式(2),(3)得

$$\|F^T(x)\|=\|f(x)\|\le\max_{1\le i\le n}\{k_i\}\|x\|,\ \|\zeta\|\le\|M\| \qquad (8)$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{(6)} &\le -[\lambda_{\min}(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})-2(\|PC^{-1}T\|\\ &\quad +\|PC^{-1}\|\|\Pi\|\|M\|)\max_{1\le i\le n}\{k_i\}]\|x\|^2\\ &= -\alpha\|x\|^2\end{aligned}$$

而 $\lambda_{\min}(P)\|x\|^2\le V\le\lambda_{\max}(P)\|x\|^2$,故

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(6)}\le-\frac{\alpha}{\lambda_{\max}(P)}V=-2\beta V$$

由比较原理[10]可得, $V(x(t,x_0))\le V(x_0)e^{-2\beta t}$,

$$\forall t\ge 0,\ \forall x_0\in R^n$$

故有 $\|x(t,x_0)\|\le\delta\|x_0\|e^{-\beta t},\ \forall t\ge 0,\ \forall x_0\in R^n$,即

$$\|u(t,u_0)-u^*\|\le\delta\|u_0-u^*\|e^{-\beta t},\ \forall t\ge 0,\ \forall u_0\in R^n$$

证毕

定理 3　若存在对称正定矩阵 P 阵及常数 $\varepsilon>0,\varepsilon'>0$ 使得

$$A=\begin{bmatrix}-C^{-1}R^{-1}P-PC^{-1}R^{-1}+(\varepsilon\|T^TT\| + \varepsilon'\|M\|^2\|\Pi\|^2)\max\limits_{1\le i\le n}\{k_i^2\}I & P & P\\ P & -\varepsilon C^2 & 0\\ P & 0 & -\varepsilon' C^2\end{bmatrix}<0,$$

则系统式(1)的平衡点 u^* 全局数稳定,且系统运动轨道 $u(t,u_0)$ 满足

$$\|u(t,u_0)-u^*\|\le\delta\|u_0-u^*\|e^{-\gamma t},\ \forall t\ge 0,\ \forall u_0\in R^n$$

其中, $\delta=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$, $\gamma=\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$,

$$\begin{aligned}Q&=C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1}-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)PC^{-2}P\\ &\quad-(\varepsilon\|TT^T\|+\varepsilon'\|M\|^2\|\Pi\|^2)\left(\max_{1\le i\le n}\{k_i\}\right)^2I\end{aligned}$$

证明　作 Lyapunov 函数 $V=x^TPx$,沿式(6)的解对 V 求导数,并利用向量不等式[8] $2u^Tv\le\frac{1}{\varepsilon}u^Tu+\varepsilon v^Tv,\ u,v\in R^n$($\varepsilon>0$ 为任意实数)及式(8)得

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}\Big|_{(6)} &= -x^T(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})x+2x^TPC^{-1}Tf(x)\\ &\quad+2x^TPC^{-1}F^T(x)\Pi\zeta\\ &\le -x^T(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1})x\\ &\quad+\frac{1}{\varepsilon}x^TPC^{-1}C^{-1}Px+\varepsilon f^T(x)TT^Tf(x)\\ &\quad+\frac{1}{\varepsilon}x^TPC^{-1}C^{-1}Px+\varepsilon\zeta^T\Pi^TF(x)F^T(x)\Pi\zeta\\ &\le -x^T\left(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1}-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)PC^{-1}C^{-1}P\right)x\\ &\quad+\varepsilon\|TT^T\|\|f(x)\|^2+\varepsilon'\|\xi\|^2\|\Pi\|^2\|F(x)F^T(x)\|\\ &\le -x^T\left(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1}-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)PC^{-1}C^{-1}P\right)x\\ &\quad+(\varepsilon\|TT^T\|+\varepsilon'\|M\|^2\|\Pi\|^2)\left(\max_{1\le i\le n}\{k_i\}\right)^2\|x\|^2\\ &= -x^T\Big(C^{-1}R^{-1}P+PC^{-1}R^{-1}-\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)PC^{-2}P\\ &\quad-(\varepsilon\|TT^T\|+\varepsilon'\|M\|^2\|\Pi\|^2)\left(\max_{1\le i\le n}\{k_i\}\right)^2I\Big)x\\ &= -x^TQx\end{aligned}$$

由 Schur 补[9], $A<0$ 的充分必要条件为 $-Q<0$,因此由 $A<0$ 知

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(6)}\le-\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2,$$

而　$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2\le V\le\lambda_{\max}(P)\|x\|^2$,

故　$\dfrac{dV}{dt}\Big|_{(6)}\le-2\gamma V$.

由比较原理[10]可得, $V(x(t,x_0))\le V(x_0)e^{-2\gamma t}$,

$$\forall t\ge 0,\ \forall x_0\in R^n.$$

因此 $\|x(t,x_0)\|\le\delta\|x_0\|e^{-\gamma t},\ \forall t\ge 0,\ \forall x_0\in R^n$,即

$$\|u(t,u_0)-u^*\|\le\delta\|u_0-u^*\|e^{-\gamma t},\ \forall t\ge 0,\ \forall u_0\in R^n.$$

证毕

定理 4　若存在对角阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)>0$,常数 $\varepsilon>0$ 使 $\Lambda=\begin{bmatrix}T^TH+HT+\varepsilon\Pi^T\Pi & \|M\|H\\ \|M\|H & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0$,则系统式(1)的平衡点 u^* 全局指数稳定,且系统运动轨道 $u(t,u_0)$ 满足

$$\|u(t,u_0)-u^*\|\le\|u_0-u^*\|\left[\sum_{i=1}^n\left(1+\frac{2R_i}{2-R_iC_ir}\gamma_i\right)^2\right]^{1/2}e^{-\frac{r}{2}t}$$

$\forall t\ge 0,\ \forall u_0\in R^n$.

其中

$$\gamma_i=\sum_{j=1}^n\left(|T_{ij}|+\sum_{k=1}^n|T_{ijk}+T_{ikj}|M_k\right)\cdot\sqrt{\frac{2k_i}{h_jC_j}}\max_{1\le l\le n}\{h_lC_lk_l\},$$

$$r=\min_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{R_iC_i}\right\}.$$

证明　取 Lyapunov 函数 $V=2\sum_{i=1}^nh_iC_i\int_0^{x_i}f_i(z)\,dz$,沿式(6)的解对 V 求导数并利用向量不等式[8] $2u^Tv\le\frac{1}{\varepsilon}u^Tu+\varepsilon v^Tv,\ u,v\in R^n$($\varepsilon>0$ 为任意实数)得

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} = 2\dot{x}^T CHf(x) = -2x^T R^{-1} Hf(x) + 2f^T(x) HTf(x)$$
$$+2f^T(x) H\Gamma^T \Pi f(x) \le -2x^T R^{-1} Hf(x)$$
$$+f^T(x)\left(\varepsilon \Pi^T \Pi + \frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2 HH + HT + T^T H\right) f(x)$$

由 Schur 补[9], $\Lambda<0$ 的充分必要条件为

$$HT + T^T H + \frac{1}{\varepsilon}\|M\|^2 HH + \varepsilon \Pi^T \Pi < 0$$

故 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} \le -2x^T R^{-1} Hf(x) = -2\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{R_i}x_i f_i(x_i) \le -rV.$

由比较原理[10]可得, $V(x(t,x_0)) \le V(x_0)e^{-rt}$, $\forall t \ge 0$, $\forall x_0 \in R^n$.

而

$$V(x_0) = 2\sum_{i=1}^{n} h_i C_i \int_0^{x_i(0)} f_i(z)\,dz \le 2\sum_{i=1}^{n} h_i C_i f_i(x_i(0))\,x_i(0)$$
$$\le 2\sum_{i=1}^{n} h_i C_i k_i x_i^2(0) \le 2\max_{1\le l\le n}\{h_l C_l k_l\}\,\|x_0\|^2$$

由式(2)可证 $\int_0^{x_i} f_i(z)\,dz \ge \frac{f_i^2(x_i)}{2k_i}$, $(i=1,2,\cdots,n)$, 故有

$$V \ge 2h_i C_i \int_0^{x_i} f_i(z)\,dz \ge \frac{h_i C_i}{k_i} f_i^2(x_i), \ (i=1,2,\cdots,n)$$

所以 $|f_i(x_i)| \le \|x_0\| \sqrt{\frac{2k_i}{h_i C_i}\max_{1\le l\le n}\{h_l C_l k_l\}}\ e^{-\frac{r}{2}t}$,

$(i=1,2,\cdots,n)$

由式(2), (4), (5)得

$$C_i D^+|x_i| \le -\frac{1}{R_i}|x_i| + \sum_{j=1}^{n}|T_{ij}|\,|f_j(x_j)|$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|T_{ijk}+T_{ikj}|\,M_k|f_j(x_j)|$$
$$\le -\frac{1}{R_i}|x_i| + \|x_0\|$$
$$\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(|T_{ij}| + \sum_{k=1}^{n}|T_{ijk}+T_{ikj}|\,M_k\right)$$
$$\cdot\sqrt{\frac{2k_j}{h_j C_j}\max_{1\le l\le n}\{h_l C_l k_l\}}\ e^{-\frac{r}{2}t}$$
$$= -\frac{1}{R_i}|x_i| + \gamma_i\|x_0\|e^{-\frac{r}{2}t}$$

故由比较原理[10]可得

$$|x_i(t,x_0)| \le |x_i(0)|\,e^{-\frac{t}{R_i C_i}} + \frac{\gamma_i}{C_i}\|x_0\|\int_0^t e^{-\frac{r}{2}s} e^{-\frac{t-s}{R_i C_i}}ds$$
$$\le \|x_0\|\left(e^{-\frac{t}{R_i C_i}} + \frac{2R_i}{2-R_i C_i r}\gamma_i e^{-\frac{r}{2}t}\right)$$
$$\le \|x_0\|\left(1 + \frac{2R_i}{2-R_i C_i r}\gamma_i\right)e^{-\frac{r}{2}t},$$
$$\forall t \ge 0,\ \forall x_0 \in R^n,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因此 $\|x(t,x_0)\| \le \|x_0\|\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2R_i}{2-R_i C_i r}\gamma_i\right)^2\right]^{1/2} e^{-\frac{r}{2}t}$, $\forall t \ge 0$, $\forall x_0 \in R^n$, 即

$$\|u(t,u_0) - u^*\| \le \|u_0 - u^*\|\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2R_i}{2-R_i C_i r}\gamma_i\right)^2\right]^{1/2} e^{-\frac{r}{2}t}$$

$\forall t \ge 0$, $\forall u_0 \in R^n$. 证毕

注 2 由定理 4 得到 Hopfield 神经网络式(7)的平衡点 u^* 全局指数稳定的充分条件为存在对角阵 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)>0$ 使得 $HT+T^TH<0$, 而这是文[12]中定理 1 给出的神经网络式(7)的平衡点 u^* 全局渐近稳定的充分条件. 文[13]中的例子表明神经网络式(7)的平衡点 u^* 全局渐近稳定时不一定全局指数稳定, 因此这里定理 4 应用于 Hopfield 神经网络(7)时, 是文[12]中定理 1 的推广.

4 例子

考虑二阶 Hopfield 型神经网络

$$C_i\frac{du_i}{dt} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{3}T_{ij}g_j(u_j) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}T_{ijk}g_j(u_j)\,g_k(u_k) + I_i,$$
$$i=1,2,3 \tag{9}$$

其中 $R=\mathrm{diag}(R_1,R_2,R_3)=\mathrm{diag}(5,5,10)$,

$C=\mathrm{diag}(C_1,C_2,C_3)=\mathrm{diag}(1.1,1.2,1)$,

$$T=(T_{ij})_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.27 & -0.18 & -0.34\\ 0.02 & 0.3 & -0.91\\ 0.21 & -0.71 & 0.19\end{bmatrix},$$

$$T_1=(T_{1jk})_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.15 & -0.02 & 0.01\\ -0.02 & 0.16 & -0.12\\ -0.05 & -0.02 & 0.07\end{bmatrix},$$

$$T_2=(T_{2jk})_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.18 & 0.01 & -0.12\\ -0.07 & 0.13 & -0.07\\ -0.05 & 0.10 & 0.06\end{bmatrix},$$

$$T_3=(T_{3jk})_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.07 & -0.01 & -0.06\\ 0.04 & 0.01 & -0.12\\ -0.01 & -0.13 & 0.16\end{bmatrix},$$

$g_i(u_i)$ 满足条件: $0<g_1'(u_1)\le0.7$, $0<g_2'(u_2)\le0.6$, $0<g_3'(u_3)\le0.8$, $|g_i(u_i)|\le0.1$, $i=1,2,3$.

由 MATLAB 计算得, 存在常数 $\varepsilon=1.4543$, $\varepsilon'=1.4543$ 及矩阵

$$P=\begin{bmatrix}0.1299 & -0.0007 & -0.0001\\ -0.0007 & 0.1166 & 0\\ -0.0001 & 0 & 0.0691\end{bmatrix}>0,$$

$Q=\mathrm{diag}(1.1814,1.1302,1.1141)>0$,

$H=\mathrm{diag}(0.1711,0.1204,0.0937)>0$ 使得 $\Phi<0$, 因此由定理 1 知, 系统式(9)的平衡点 u^* 全局渐近稳定.

取矩阵 $P=\mathrm{diag}(0.2354,0.2164,0.1305>0$, 则 $\alpha>0$, 因此由定理 2 知, 系统式(9)的平衡点 u^* 全局指数稳定.

存在常数 $\varepsilon=1.5917$, $\varepsilon'=1.5666$ 及矩阵 $P=\mathrm{diag}(0.2354,0.2164,0.1305)>0$, 使 $A<0$, 因此由定理 3 知, 系统式(9)的平衡点 u^* 全局指数稳定.

5 结论

通过对二阶连续 Hopfield 型神经网络平衡点的全局稳定性的分析, 得到了网络平衡点全局渐近稳定和全局指数稳定的充分条件以及指数收敛速度的估计. 这些条件都是新的, 可用于设计全局渐近稳定和全局指数稳定的神经网络.

参考文献:

[1] Dembo A, Farotimi O, Kailath T. High-order absolutely stable neural networks[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems, 1991, 38(1): 57 - 65.

[2] Kosmatopoulos E B, Christodoulou M A. Structural properties of gradient recurrent high-order neural networks[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems Ⅱ, 1995, 42(9): 592 - 603.

[3] Kosmatopoulos E B, Polycarpou M M, Christodoulou M A, Ioannou P A. High-order neural network structures for identification of dynamical systems[J]. IEEE Trans. on Neural Networks, 1995, 6(2): 422 - 431.

[4] Zhang T, Ge S S, Hang C C. Neural-based direct adaptive control for a class of general nonlinear systems[J]. International Journal of Systems Science, 1997, 28(10): 1011 - 1020.

[5] Su J, Hu A Q, He Z Y. Stability analysis of analogue neural networks[J]. Electronics Letters, 1997, 33(6): 506 - 507.

[6] Sudharsanan S I, Sundareshan M K. Exponential stability and a systematic synthesis of a neural network for quadratic minimization[J]. Neural Networks, 1991, 4(5): 599 - 613.

[7] 关治洪, 孙德宝, 沈建京. 高阶 Hopfield 型神经网络的定性分析[J]. 电子学报, 2000, 28(3): 77 - 80.

[8] Xu B. Stability robustness bounds for linear systems with multiple time-varying delayed perturbations[J]. Int. J. Systems Sci., 1997, 28(2): 1311 - 1317.

[9] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Studies in Applied Mathematics, Philadelphia: IAM, 1994.

[10] 廖晓昕. 动力系统稳定性理论和应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

[11] Forti M. On global asymptotic stability of a class of nonlinear systems arising in neural network theory[J]. Journal of Differential Equations, 1994, 113(1): 246 - 264.

[12] Kaszkurewicz E, Bhaya A. On a class of global stable neural circuits[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems Ⅰ, 1994, 41(2): 171 - 174.

[13] Liang X B, Wu L D. Global exponential stability of a class of neural networks[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems Ⅰ, 1999, 46(6): 748 - 751.

作者简介:

徐炳吉　男, 副教授, 博士生; 主要研究方向为神经网络及脉冲系统的稳定性理论等.

廖晓昕　男, 教授, 博导; 主要研究方向为神经网络及非线性控制.

刘新芝　男, 教授, 博导; 现在加拿大滑铁卢大学应用数学系, 被聘为华中科技大学"长江学者奖励计划"特聘教授. 主要研究方向为大型动力系统的稳定理论、混合动力系统的理论与应用、脉冲系统的定性分析等.

陈钦生　男, 副教授; 主要研究方向为理论物理及神经网络等.